2/50

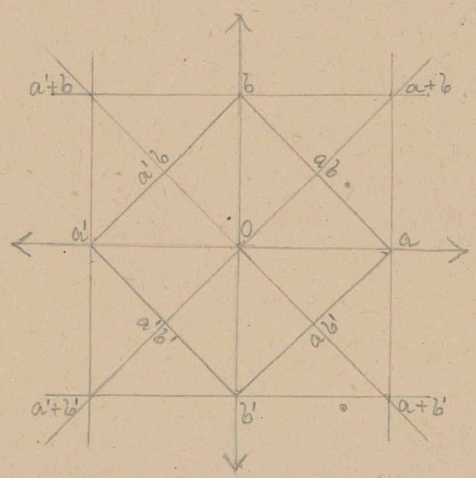
12.

BENEDYKT BORNSTEIN

O kategorialnej geometrii algebraicznej

Kreślimy na płaszczyźnie dwie względem siebie prostopadłe osie współrzędnych i dzielimy w ten sposób płaszczyznę na 4 ćwiartki. A teraz - w związku z tym podziałem płaszczyzny - zadajemy sobie pytanie: jakie są możliwe podstawowe rodzaje - kategorie - prostych i punktów na płaszczyźnie? czy i jakie są możliwe punkty i proste znajdujące się: 1/ tylko w jednej z ćwiartek płaszczyzny, 2/ w dwóch, 3/ w trzech, 4/ we wszystkich ćwiartkach płaszczyzny i 5/ po zewnątrz ćwiartek płaszczyzny (elementy "niewłaściwe").

Odpowiedź na te pytania daje nam wszystkie możliwe kategorie punktów i prostych na płaszczyźnie. Widzimy je (z wyjątkiem elementów "niewłaściwych": prostej w nieskończoności i 4 punktów na niej leżących) na poniższym diagramacie, abstrahując tymczasem od znajdujących się tam denominacji algebraicznych.



Diagramat ten przedstawia w ten sposób płaszczyznę geometryczną ze wszystkimi jej elementami, lecz nie płaszczyznę zwykłą, mnogościową, a tylko płaszczyznę geometryczną, kategorialną, gdzie każdy rodzaj elementów jest przedstawiony przez jeden tylko element, kategorię geometryczną, odmienną jakość geometryczną, np. punkt w pierwszej ćwiartce, prosta równoległa do osi pionowej i na prawo od niej położona itp. Mamy tu więc elementy geometrii na wskroś jakościowej, nie operującej pojęciami wielkości i odległości, lecz interesującej się tylko położeniem, wzgl. kierunkiem elementów - innymi słowy, jesteśmy tu w zasięgu geometrii rzutowej (geometrii położenia). Tylko że u nas te elementy jakościowe sprowadzone są do postaci typów, kategoryj - i w ten sposób występują tutaj jako elementy kategorialnej geometrii położenia.

Chodzi teraz o to, czy nie da się tu wprowadzić jakiego rachunku, operującego znakami, jakiego algorytmu, który by pozwolił odkrywać i przedstawiać symbolicznie związki, zachodzące między kategoriami geometrycznymi. Byłby to rachunek kategorialnych punktów (położeń) i prostych (kierunków).

W tej myśli zwracamy się do naszego diagramatu, przedstawiającego system elementów geometrii kategorialnej, tymczasem jeszcze biorąc ten diagramat w jego "nagiej" postaci, bez denominacji algebraicznych. Oznaczymy teraz punkt leżący na prawej połowie osi poziomej przez a, punkt przeciwległy na tej osi przez a' (negacja a); punkt leżący na górnej połowie - przez b, punkt przeciwległy przez b' (negacja b). Dla oznaczenia dwóch zasadniczych działań geometrii rzutowej: przecinania i rzutowania (łączenia) wprowadzamy znaki + i x. Połączenie dwóch punktów a i b daje nam prostą a x b czyli ab i odpowiednio przecięcie dwóch prostych (względem siebie prostopadłych) a i b daje punkt a + b. Wobec powyższego linię łączącą punkt a z punktem a' czyli oś poziomą oznaczać będziemy przez aa' i podobnie oś pionową przez bb'. Te osie współrzędnych, jako momenty wyjścia i odniesienia dla dalszych zróżnicowań elementów płaszczyzny, będą elementami najmniej określonymi, a więc jakościowo minimalnymi, i dlatego oznaczymy je symbolem 0, tak że aa' = 0 i bb' = 0. Jako elementy minimalne będą one modułami dodawania czyli przecinania. Wobec tego a + aa' = a + 0 = a; widzimy stąd, że prosta prostopadła do osi poziomej (0) i dająca w przecięciu z nią punkt a - sama jest prostą a. W ten sposób boki zewnętrznego kwadratu okazują się prostymi a, b, a', b' i oznaczenie pozostałych elementów "właściwych" naszego diagramatu oraz elementów "niewłaściwych" nie przedstawia już teraz żadnych trudności[1]. √ Tak oto stworzyliśmy warunki wystarczające dla powstania rachunku geometrycznego.

Weźmy parę przykładów tego rachunku, parę twierdzeń, które zresztą możemy wprost odczytać z diagramatu. Np. widzimy, że łącząc punkt a + b z punktem a + b' otrzymujemy prostą a, a więc że (a + b)(a + b') = a. Podobnie stwierdzamy, że a' = (a' + b)(a' + b'). Wiemy już, że aa' = 0, a więc że 0 = (a + b)(a + b')(a' + b)(a' + b'), czyli że zero rozwija się na iloczyn czterech wierzchołków zewnętrznego kwadratu. Tych parę przykładów wystarcza zupełnie, ażeby zorientować się co do natury tego rachunku punktów i

---

[1] Zwracamy tu uwagę na to, że diagramat ten dotyczy tylko przypadku, kiedy $a \not< a'$, $a' \not< a$, $b \not< b'$, $b' \not< b$, przy czym $a \not< b$, $a \not< b'$, $b \not< a$ i $b' \not< a$. (znak $<$ oznacza przechodzenie prostej przez punkt). Modyfikacje tego diagramatu, powstałe przez obrót prostych współrzędnych o kąt 90° lub o kąt 45°, będą odpowiadały tym wyłączonym powyżej stosunkom. Ta kategorialna geometria łatwo również daje się przedstawić w postaci trójwymiarowej, w której na miejscu dualnych kwadratów występują: sześcian i dualny względem niego ośmiościan.

√ (Element geometryczny dualny względem elementu 0, a więc względem osi współrzędnych lub ich środka, oznaczamy przez 1).

prostych: we wzorach jego odpoznajemy znane nam wzory algebry logiki, twierdzenia dichotomii, określenia zera ($a + 0 = a$), rozwinięcie zera według a i b itp. I ta całkowita równoległość związków algebry logiki ze stosunkami zachodzącymi między kategorialnymi elementami geometrycznymi, których system przedstawia nasz diagramat, może być wykazana systematycznie, poczynając od pewników[1] i przechodząc następnie do twierdzeń.

Ten zespół geometrii kategorialnej z jej "charakterystyką", z algebrą logiki stanowić będzie kategorialną geometrię algebraiczną (algebraiczno-logiczną). Mamy tu dokładny odpowiednik geometrii analitycznej Descartes'a z tą różnicą, że gdy geometria analityczna jest geometrią ilościową i mnogościową, to ta geometria jest jakościowa i kategorialna i że odpowiednio do tego zamiast algebry ilościowej mamy tu algebrę jakościową (algebrę logiki).

1948 r.

1/ Aksjomatyka geometrii kategorialnej może być ściśle wzorowana na aksjomatyce algebry logiki.